Serie di Fourier

2.1 Esercizi risolti

Esercizio 2.1.1

Verificare che se una funzione $f(x)$ è periodica di periodo T, allora la funzione $f(\alpha x)$ è periodica di periodo T/α.

Soluzione Per ipotesi, $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$. Posto $g(x) = f(\alpha x)$, si ha

$$g\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) = f\left(\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = g(x).$$

Esercizio 2.1.2

Determinare il periodo delle seguenti funzioni.

$f_1(x) = \sin(3x)$; $\quad f_2(x) = \cos(x/4)$; $\quad f_3(x) = 1 + \sin(x) + \sin(2x)$;
$f_4(x) = |\sin(x)|$; $\quad f_5(x) = \sin^2(x)$.

Soluzione Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si ha subito che $f_1(x)$ ha periodo $2\pi/3$ e $f_2(x)$ ha periodo 8π. Il periodo di $f_3(x)$ è il minimo comune multiplo tra i periodi delle funzioni ed è quindi uguale a 2π.

Il periodo di $f_4(x)$ è $T = \pi$; infatti $|\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x|$ e non esistono numeri reali positivi minori di π che soddisfano questa proprietà .

Essendo $f_5(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, il periodo di $f_5(x)$ è uguale a π.

Esercizio 2.1.3

Tracciare il grafico delle funzioni definite su $\mathbf{R}$, che nell'intervallo $[0, \pi)$ sono uguali alla funzione $f(x) = x$ e che soddisfano le seguenti proprietà:

a) 2π-periodica, pari; $\quad$ b) 2π-periodica, dispari; $\quad$ c) π-periodica.

Esercizio 2.1.4

Data la funzione $f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x$, si chiede di:

1. determinarne il periodo;
2. calcolarne lo sviluppo in serie di Fourier;
3. studiare la convergenza quadratica, puntuale, totale di tale sviluppo.

Soluzione Scrivendo $f(x) = \sin x \sin^2 x + \sin^2 x$ e utilizzando le formule di duplicazione e di Werner otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

La serie di Fourier si riduce a un polinomio trigonometrico; non si pone quindi il problema della convergenza.

Esercizio 2.1.5

Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione definita in **R**, periodica di periodo 2π e definita in $(-\pi, \pi)$ come

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Studiare la convergenza quadratica, puntuale, totale di tale sviluppo.

Soluzione Calcoliamo i coefficienti di Fourier;

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2dx + \int_{0}^{\pi} dx\right) = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\cos kx dx + \int_{0}^{\pi} \cos kx dx\right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 2\sin kx dx + \int_{0}^{\pi} \sin kx dx\right) = \frac{(-1)^k}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{2}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

La serie di Fourier di $f(x)$ è quindi

$$f(x) = \frac{3}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x.$$

La serie converge quadraticamente, converge puntualmente a $f(x)$ in tutti i punti $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ e al valore regolarizzato $3/2$ nei punti $x = k\pi$; la serie non converge totalmente in **R**.

Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - 3/2$ è una funzione dispari; avremmo potuto calcolare la serie di Fourier della funzione $g(x)$ (evitando il calcolo di a_0 e a_n) e ottenere poi quella di $f(x)$ aggiungendo la costante $3/2$.

Esercizio 2.1.6

Data la funzione $f(x) = x$ definita su $(-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità su **R**, determinare la sua serie di Fourier. Determinare inoltre la somma della serie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Soluzione La funzione è dispari, per cui $a_0 = 0$ e $a_n = 0$, mentre $b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$, per cui

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

Questa serie converge quadraticamente a $f(x)$, converge puntualmente al valore regolarizzato 0 nei punti $(2n+1)\pi$ e a $f(x)$ negli altri punti; non converge totalmente in **R**.

Per calcolare la somma della serie S utilizziamo l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^T f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi(a_n^2 + b_n^2).$$

Essendo $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^3}{3}$ si ha $\frac{2\pi^3}{3} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$, da $S = \frac{\pi^2}{6}$.

Esercizio 2.1.7

Data la funzione $f(x) = |x|$ definita su $[-\pi, \pi]$ e prolungata per 2π-periodicità su $\mathbf{R}$, determinare il suo polinomio di Fourier $P_n(x)$. Studiare la convergenza della serie di Fourier. Utilizzare i risultati ottenuti per verificare che

$$S = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Soluzione La funzione è pari, per cui $b_n = 0$, mentre $a_0 = \pi/2$ e

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

per cui il polinomio di Fourier è

$$P_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x.$$

La serie di Fourier di $f(x)$ converge totalmente su $\mathbf{R}$, essendo maggiorata dalla serie convergente

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Converge anche puntualmente in ogni punto e quadraticamente. Per il calcolo di S è sufficiente utilizzare lo sviluppo di Fourier calcolato in $x = 0$.

Esercizio 2.1.8

Scrivere la serie di Fourier della funzione $f(x)$, periodica di periodo π, definita da $f(x) = |\sin x|$ per $x \in [0, \pi]$ e discuterne il tipo di convergenza.
Soluzione La funzione $f(x)$ (onda raddrizzata) è pari per cui $b_n = 0$. Inoltre essa può essere vista come una funzione di periodo π oppure di periodo 2π. Nel primo caso dobbiamo utilizzare le apposite formule per il calcolo dei coefficienti, mentre se la consideriamo periodica di periodo 2π possiamo utilizzare le solite formule. Procediamo nel secondo modo, ottenendo:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}, \qquad a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

per cui si ha

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4m^2)} \cos(2mx)$$

La serie converge totalmente su $\mathbf{R}$ e quindi anche puntualmente in ogni punto e quadraticamente.

Esercizio 2.1.9

Scrivere la serie di Fourier della funzione $g(x)$, periodica di periodo 2π, definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Soluzione La funzione $g(x)$ (semionda raddrizzata) può essere ricavata dall'onda radrizzata $f(x)$ dell'esercizio precedente, osservando che $g(x) = \dfrac{f(x) + \sin x}{2}$. Quindi

$$g(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4m^2)} \cos(2mx)$$

Anche in questo caso si tratta di una serie totalmente convergente.